



TITLE:

非線型Klein-Gordon方程式のソリトン (ソリトンの研究)

AUTHOR(S):

広田, 良吾

CITATION:

広田, 良吾. 非線型Klein-Gordon方程式のソリトン (ソリトンの研究). 数理解析研究所講究録 1971, 125: 89-109

ISSUE DATE:

1971-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106519>

RIGHT:

非線型 Klein-Gordon 方程式のソリトン

RCA 基礎研 広田 良吾

§ 1. 序

非線型 Klein-Gordon 方程式、特に sine-Gordon 方程式¹⁾ は色々の物理現象の model 方程式として有名であるが^{2), 3)} 4), 5) この方程式の解が、ある種の非線型回路方程式で得られた格子ソリトンの解と、非常によく似た性質をもつ事と、解の具体的な形を求めて明らかにする。

この非線型回路方程式は極限操作によって Modified Korteweg-de Vries equation になり、Modified Korteweg-de Vries equation の解から Korteweg-de Vries equation の解が求まり⁶⁾、Korteweg-de Vries equation は戸田先生によって研究された非線型格子振動の方程式⁷⁾ともつながっている。一方 KdV equation と Schrödinger eq. とには面白い関係がある事は知られているが⁸⁾、非線型 Klein-Gordon 方程式の厳密解を求めて、それからのずれについて線型化すると、

Schrödinger eq. が得られるので、非線型 Klein-Gordon 方程式と KdV eq. とは Schrödinger eq. を通しても結ばれている。又、戸田型非線型格子振動方程式は、これと等価な非線型回路方程式におきかえる事も出来る。⁹⁾ 図1参照

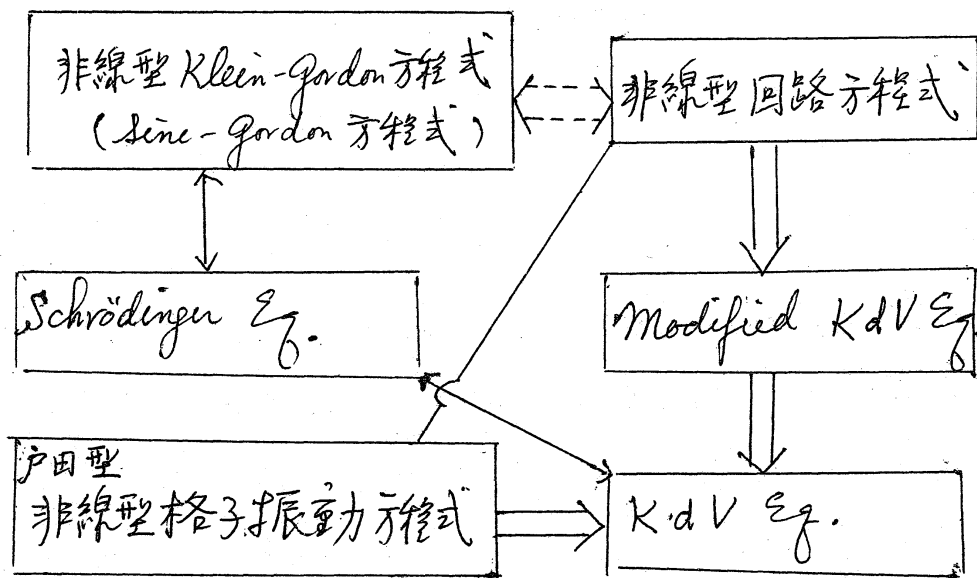


図 1.

Sine-Gordon 方程式の長所は、 ϕ に相対論的に不変であるから、Passive な系 (ソリトンが静止している状態) から Active な系 (ソリトンが等速運動している状態) へ Lorentz 変換によって移れる事である。この事は signal の Parametric amplification を論ずる時に便利である。

ϕ 2 に、Sine-Gordon 方程式とは Bäcklund-transformation

10) という面白い変換があって、既知の解から新しい解を求めるのは、Riccati型の全微分方程式を解く事に帰着する。
 したがって、非線型格子振動方程式の解を求めるためにも、
 先づ sine-Gordon 方程式の解を求めてみる事は色々と役に
 立つ事が多い。

第2章以下各章の内容は次の通りである。

第2.1章では Josephson-junction transmission line の
 model 方程式として sine-Gordon 方程式を考え、junction
 を流れる current としてソリトンの量を定義する、そして
 sine-Gordon 方程式の解法として Bäcklund-transformation
 を紹介する。

第2.2章ではある種の対称非線型回路方程式を考え、¹¹⁾この方
 程式の極限が modified Korteweg-de Vries equation になる
 事を示す。

第3章では、これから二つの方程式の解が、(i)単一ソリトン(ii)
 ソリトンのつらなり波(iii)ソリトン-ソリトンの衝突の各場合
 について同じ型の解をもつ事を示す。

第4.1章では、sine-Gordon 方程式において、つらなり
 波の中のさざ波を考えると、さざ波に対する方程式が同期的
 な Potential をもつ Schrödinger equation になる事を示す。
 この方程式は generalized Lamé equation の特別な

場合であり、厳密解¹²⁾が存在するため、周期的なPotential場におけるエネルギーのバンド構造が正確に求められる。¹³⁾

第4.2章では上で求めたソリトンを表わす解が対称回路方程式においても同じ形で求められる事を示し、これから Modified K-dV eq. や、戸田型非線型格子振動方程式においても対応する解が存在する事を示す。最後にこの形の関数は非線型 Schrödinger equation¹⁴⁾の解でもあり、Envelop Soliton¹⁵⁾のつらなり波と与えるものである事を示す。

§2.1 Sine-Gordon 方程式

A.C. Scott によると Josephson-junction transmission line は図2に示すように非常に薄い絶縁層を介して相互作用している二つの超電導の板から成り立ち、この transmission line は図3の等価回路でおき換えられる。

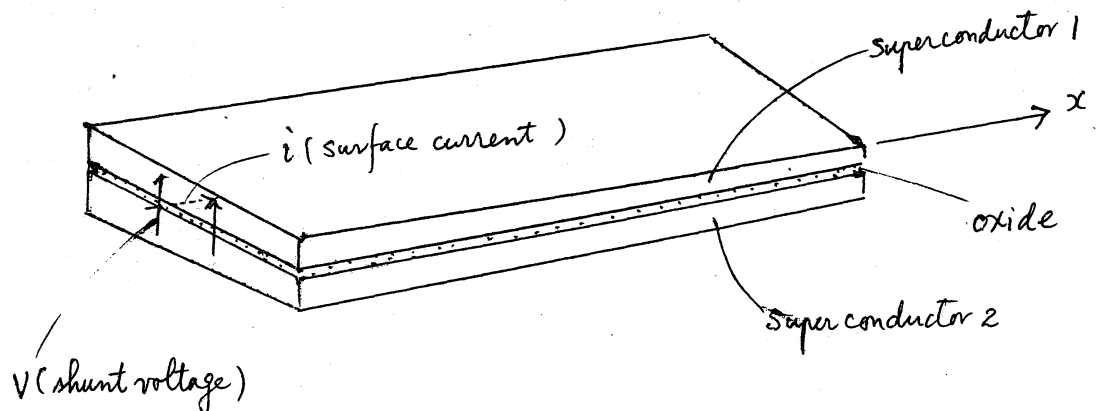


図 2

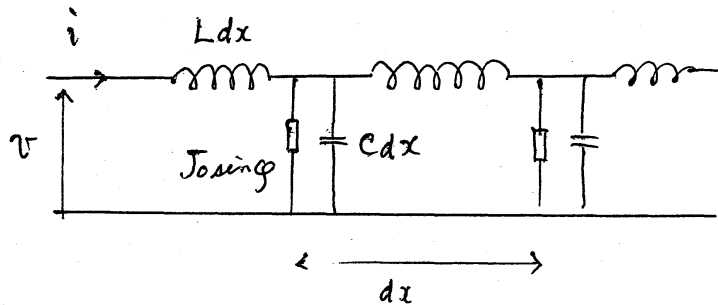


図 3

絶縁層を流れる Josephson current¹⁶⁾ J は超電導状態 1 と 2 の phase の差 φ に関係しており、次式で与えられる。

$$J = J_0 \sin \varphi. \quad (1)$$

図 3 で与えられた電送方程式を適当な単位を用いて表わすと次式になる

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial i}{\partial t} \quad (2)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial t} - \sin \varphi \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = v \quad (4)$$

式(2), (4) から

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -i \quad (5)$$

を得る。

式(2)(3)(4) から次の sine-gordon 方程式が得られる,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \sin \varphi \quad (6)$$

座標変換 $t = p - q, x = p + q$ により (6) 式は

$$\frac{\partial^2}{\partial p \partial q} \varphi = \sin \varphi \quad (7)$$

となるが、今 (7) 式の一つの解を φ_0 とするとこの φ_0 からパラメータ σ を含む変換、Bäcklund-transformation により、新しい解 φ が構成される:

$$\varphi = B_\sigma \varphi_0 \quad (8)$$

それは、 φ_0 が (7) 式の解であるとき、次の連立方程式をみたす解 φ も (7) 式の解になるからである,

$$\frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{2} (\varphi - \varphi_0) = \frac{1 + \sin \sigma}{\cos \sigma} \sin \frac{1}{2} (\varphi + \varphi_0) \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{2} (\varphi + \varphi_0) = \frac{1 - \sin \sigma}{\cos \sigma} \sin \frac{1}{2} (\varphi - \varphi_0). \quad (10)$$

新しい関数 ω を次式で定義すると,

$$\omega = \tan \frac{\varphi}{4} \quad (11)$$

式(9), (10)から, w は Riccati 型の全微分方程式に満足する事がわかる;

$$dw = (aw^2 + bw + c)dp + (a'w^2 + b'w + c')dq \quad (12)$$

そこで

$$\left. \begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial p} \mp \frac{1 + \sin \sigma}{\cos \sigma} \sin \frac{\varphi_0}{2} \right] \quad (13)$$

$$\left. \begin{matrix} a' \\ c' \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial q} \pm \frac{1 - \sin \sigma}{\cos \sigma} \sin \frac{\varphi_0}{2} \right] \quad (14)$$

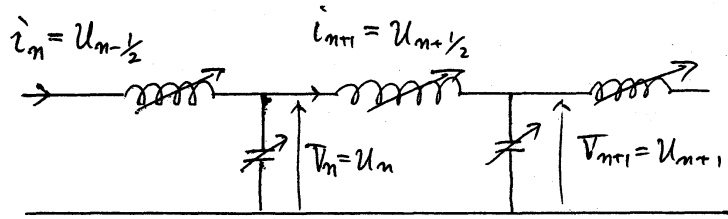
$$\left. \begin{matrix} b \\ b' \end{matrix} \right\} = \frac{1 \pm \sin \sigma}{\cos \sigma} \cos \frac{\varphi_0}{2} \quad (15)$$

A. Seeger 達は³⁾ Bäcklund Transformation を用いて, sine-Gordon 方程式の色々な解を求めた。

§ 2.2 対称非線型回路方程式

対称非線型回路とは図4で示される梯子型の LC 非線型回路であるが、論文(1)の結果を用いると次の微分方程式によって記述される。

$$\frac{1}{1+u_n^2} \frac{\partial u_n}{\partial t} = u_{n-\frac{1}{2}} - u_{n+\frac{1}{2}}, \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$



charge
Capacitance $Q(V_n) = \tan^{-1} V_n$, Flux $B(i_n) = \tan^{-1} i_n$

図 4.

今

$$U_n(t) = \frac{\partial \phi_n}{\partial t} \quad (17)$$

により ϕ_n を定義すると、 ϕ_n に対する微分方程式は

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial t} = \tan(\phi_{n-1/2} - \phi_{n+1/2}) \quad (18)$$

となる。この方程式の解が式(6)の sine-gordon 方程式の解と非常によく似た性質をもっている事を次の第3章で示す。

式(18)は次のようにして modified K-dV Equation に書き直される。

式(18)の右辺で差分を微分に置きかえて3次の微分迄とり、 $\tan \phi$ の項も ϕ についての3次迄残して高次の項を落とすと、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\alpha}{3} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^3 + \delta \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0 \quad (19)$$

が得られる。ここで α, δ は常数。上式を x で微分し

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u \quad (20)$$

とすると、 u についての微分方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \delta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (21)$$

となり Modified K-dV Equation が得られる。

§3. sine-Gordon 方程式と対称非線型回路方程式のソリトン解の比較

sine-Gordon 方程式(6)と対称非線型回路方程式(18)の解が非常によく似た性質をもつ事を示すために、今式で $u(x, t)$ を定義する。

$$u(x, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (22)$$

ここで φ は sine-Gordon 方程式の解であるから式(5)によって $u(x, t)$ は Junction を流れる電流の意味をもっている。

この $u(x, t)$ を左に、対称非線型方程式(16)の解 $u_n(t)$ を右に、色々な場合について具体的に書くと次の様になる。

方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = \sin \varphi \quad \left| \quad \frac{\partial \phi_n}{\partial t} = \tan(\phi_{n-\frac{1}{2}} - \phi_{n+\frac{1}{2}}) \quad (23)$$

$$u(x, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \left| \quad u_n(t) = \frac{\partial \phi_n}{\partial t} \quad (24)$$

(i) 単一ソリトン

$$u(x,t) = \pm \frac{2\gamma}{\cosh \xi}$$

 $\xi = \gamma(x - vt)$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$v: \text{任意常数} < 1$$

$$u_n(t) = \pm \frac{\Omega}{\cosh \xi} \quad (25)$$

 $\xi = 2(\Omega t - pn)$

$$\Omega = \sinh p$$

$$p: \text{任意常数}$$

$$p: \text{任意常数}$$

(ii) ソリトンの連成波

$$a) u(x,t) = 2\kappa\gamma \operatorname{cn}(\xi, \kappa)$$

 $\xi = \gamma(x - vt)$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$b) u(x,t) = 2\gamma \operatorname{dn}(\xi, \kappa)$$

 $\xi = \gamma(x - vt)/\kappa$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$v < 1; \text{任意常数}$$

$$a) u_n(t) = \kappa\Omega \operatorname{cn}(\xi, \kappa) \quad (26)$$

$$\xi = 2(\Omega t - pn)$$

$$\Omega = \frac{\operatorname{sn}(p, \kappa)}{\operatorname{dn}(p, \kappa)}$$

$$b) u_n(t) = \Omega \operatorname{dn}(\xi, \kappa) \quad (27)$$

$$\xi = 2(\Omega t - pn)$$

$$\Omega = \frac{\operatorname{sn}(p, \kappa)}{\operatorname{cn}(p, \kappa)}$$

$$p: \text{任意常数}$$

上式で $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}, \operatorname{dn}$ は Jacobi の楕円関数で κ は modulus である。ソリトンの連成波は modulus $\kappa \rightarrow 1$ の極限で単一ソリトンに一致する。

(iii) ソリト-ソリト-の衝突

微分方程式の解は次の式で与えられる。

$\varphi(x, t)/4$ $= \tan^{-1} \left[e^{\varphi_0} \frac{\sinh \frac{1}{2}(\xi - \eta)}{\cosh \frac{1}{2}(\xi + \eta)} \right]$ $\xi > \eta$ $\xi = \gamma(x + vt)$ $\eta = \pm \gamma(x - vt)$ $e^{\pm \varphi_0} = v$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$ $v < 1, \text{任意常数}$	$\phi_n(t)$ $= \tan^{-1} \left[e^{\varphi_0} \frac{\sinh \frac{1}{2}(\xi - \eta)}{\cosh \frac{1}{2}(\xi + \eta)} \right] \quad (28)$ $\xi > \eta$ $\xi = \Omega_1 t - p_1 n$ $\eta = \Omega_2 t - p_2 n$ $e^{\varphi_0} = \frac{\sinh \frac{1}{2}(p_1 - p_2)}{\sinh \frac{1}{2}(p_1 + p_2)}$ $p_1, p_2, \text{任意常数}$
---	---

となるのでソリト-ソリト-の衝突を表わす式は

$U(x, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ $= \frac{2\gamma \operatorname{sech} \xi \pm 2\gamma \operatorname{sech} \eta}{\cosh \varphi_0 - \sinh \varphi_0 (\tanh \xi \tanh \eta + \operatorname{sech} \xi \times \operatorname{sech} \eta)}$	$U_n(t) = \frac{\partial \phi_n}{\partial t}$ $= \frac{\Omega_1 \operatorname{sech} \xi \pm \Omega_2 \operatorname{sech} \eta}{\cosh \varphi_0 - \sinh \varphi_0 (\tanh \xi \tanh \eta - \operatorname{sech} \xi \operatorname{sech} \eta)} \quad (29)$
---	---

となる。 $\eta \rightarrow \infty$ の極限ではそれぞれ

$U(x, t) = \frac{2\gamma}{\cosh(\xi - \varphi_0)}$	$U_n(t) = \frac{\Omega_1}{\cosh(\xi - \varphi_0)}$
--	--

となり単一ソリトンを表わしている。

§4.1 ソリトンの連成波の中のミズ波

sine-Gordon 方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = \sin\varphi \quad (6)$$

において、 φ を式 (6) の厳密解 φ_0 と、それからのずれ $\lambda\psi(x,t)$ とに分けて

$$\varphi(x,t) = \varphi_0(x,t) + \lambda\psi(x,t) \quad (30)$$

とおき、 λ の一次の項迄 ε とすると次の方程式が得られる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(x,t) = \cos\phi^0(x,t) \cdot \psi(x,t) \quad (31)$$

$\phi^0(x,t)$ としてソリトンの連成波を与える解。

$$\phi^0(x,t) = \pi - 2am\left(\frac{x}{k}\right) \quad (32)$$

am は amplitude function

k は modulus

ε 使うと

$$\cos\phi^0(x,t) = 2\operatorname{sn}^2\left(\frac{x}{k}, k\right) - 1 \quad (33)$$

となる。そこで x/k を改めて x とおき、 $\psi(x,t) = e^{i\omega t}\psi(x)$

とおくと式 (31) は次の形の Schrödinger 方程式になる

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2k^2 \operatorname{sn}^2(x, k) - \omega^2\right) \psi(x) = 0. \quad (34)$$

この式は generalised Lamé equation¹²⁾,

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2(x, k) + A\right) \psi(x) = 0 \quad (35)$$

で $n=1$ とおいた場合である。

同じように事を次の非線型 Klein-Gordon 方程式で与えたと。
以下に示すように generalised Lamé equation で $n=2$
とおいた方程式が得られる。

非線型 Klein-Gordon 方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi(x, t) = -2\varphi(1-\varphi^2) \quad (36)$$

において

$$\varphi_0(x, t) = k \alpha \operatorname{sn}(\alpha x, k) \quad (37)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{1+k^2}}$$

は式(36)の厳密解である。そこで $\varphi = \varphi_0 + \lambda \psi$ とおいて、 λ
の一次の項迄とると、次の式が得られる

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi(x, t) = -2(1-3\varphi_0^2) \cdot \psi(x, t), \quad (38)$$

$\lambda > 0$ の x を z とおき、 $\psi(x, t) = e^{i\omega t} \psi(z)$ とおくと次の方程式が得られる

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 6k^2 \operatorname{sn}^2(z, k) - \frac{\omega^2 + 2}{\lambda^2} \right) \psi(z) = 0. \quad (39)$$

これは generalised Lamé equation で $n=2$ とおいた場合である。

Generalised Lamé equation の解は 1872 年 Hermite によって求められているが、¹²⁾ $\lambda > 0$ は $n=1$ の場合であり、式 (34) の解について詳しく議論する。

式 (34) は周期 $2K(k)$ ($K(k)$ は第一種完全楕円積分) をもつポテンシャルで、この場合 $V(z) = 2k^2 \operatorname{sn}^2(z, k) - 1$ (図 5 参照) の Schrödinger 方程式である。

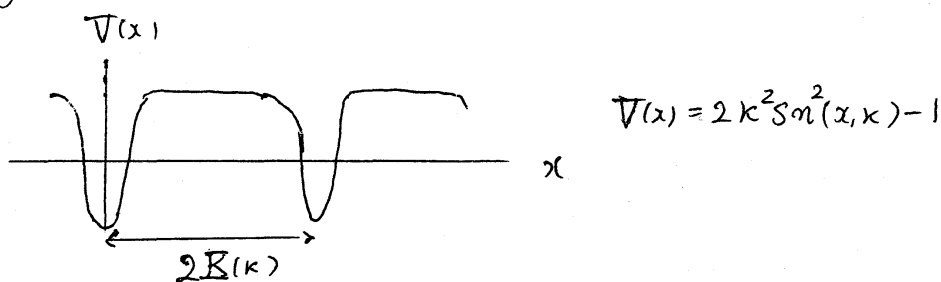


図 5

Hermite の解を少し変形して Bloch 関数形で表わすと

$$\psi(z) = u_q(z) e^{iqz} \quad (40)$$

こゝで

$$U_q(x) = \frac{H_0(0) H_0(x+\beta)}{H_0(x) H_0(\beta)} \quad (41)$$

$$\omega = i \operatorname{cn}(\beta) / \operatorname{sn}(\beta) \quad (42)$$

$$q = i \operatorname{Z}(\beta) + i \operatorname{cn}(\beta) \operatorname{dn}(\beta) / \operatorname{sn}(\beta) \quad (43)$$

H_0 , Z は Jacobi の theta, Zeta 関数であり, β は任意のパラメータである。

振動数 ω と波数 q が共に実数になるような β を探すと、 α を実のパラメータとしたとき、次の二つの場合に限られる。

$$(i) \quad \beta = i\alpha \quad (44)$$

$$(ii) \quad \beta = i\alpha + K(k) \quad (45)$$

したがって、バンド構造は図6に示すように、周期的ポテンシャル場にも拘わらず、非常に単純になる。その原因は単一ソリトンポテンシャルによって波が散乱 (phase を除いて) されない事にある¹⁷⁾と思われる。

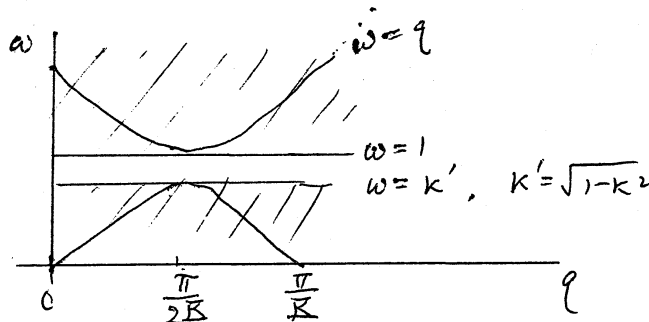


図 6.

尚式(40)で表わされる解は、座標変換によって動く系に移ると、ソリトンの連成波が Pumping Power とみなせるから、signal の parametric amplification を表わすものと思われるが詳しい解析は未だ終っていない。

§4.2 連成波の中のソグ波

前節で、sine-Gordon 方程式におけるソリトンの連成波の中のソグ波を表わす関数が得られたが、この関数は又、対称非線型回路方程式、Modified K-dV 方程式、戸田型非線型格子振動方程式そして非線型光学や超電導に出てくる非線型 Schrödinger 方程式の解ともなり得る事を以下に示す。

a) 対称非線型方程式

前節の手続きに1/2から方程式、

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial t} = \tan(\phi_{m-\frac{1}{2}} - \phi_{m+\frac{1}{2}}) \quad (23)$$

を既知の解 ϕ_m^0 を展開して、 $\phi_m = \phi_m^0 + \lambda \psi_m$ とおき、 λ の一次の項迄とすると次の方程式が得られる。

$$\frac{\partial \psi_m}{\partial t} = [1 + (u_m^0(t))^2] (\psi_{m-\frac{1}{2}} - \psi_{m+\frac{1}{2}}) \quad (46)$$

ここで

$$u_m^0(t) = \frac{\partial \phi_m^0}{\partial t} \quad (47)$$

今 $U_m^0(t)$ と 1 ソリトン の 連成波, 式 (26) を と 3 と,

$$U_m^0(t) = \kappa \Omega \operatorname{cn}(\xi, \kappa) \quad (26)$$

式 (46) の解 は

$$\psi_m(t) = \frac{H_0(\beta) H_0(\xi + \beta)}{H_0(\beta) H_0(\xi)} e^{i 2(\omega t - k m)} \quad (48)$$

と書ける事が示される。

b) Modified K-dV 方程式

が 2.2 章で得られた式 (19) において

$$\phi = \phi_0 + \lambda \psi \quad (49)$$

とおくと, ψ に関する一次式は

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \left[1 + \alpha \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial \psi}{\partial x} + \delta \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = 0 \quad (50)$$

となる。 $\frac{\partial \phi_0}{\partial x}$ がソリトン の 連成波 を 表わす時, 即ち

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial x} = A \operatorname{dn}(\xi, \kappa) \quad (51)$$

より

$$A^2 = \frac{6}{\alpha} \delta p^2, \quad \xi = \Omega t - p x$$

$$\Omega = p + \delta p^3 (2\kappa^2 - 1), \quad p \text{ は 任意 常数}$$

のとき、式(50)の解も式(40)と同じ形

$$\psi(x,t) = \frac{H_0(0) H_0(\xi + \beta)}{H_0(\beta) H_0(\xi)} e^{i(\omega t - kx)} \quad (52)$$

になる事が示された。

c) 戸田型非線型格子振動方程式

戸田⁷⁾によって与えられる方程式,

$$m \frac{d^2 r_n}{dt^2} = a (2e^{-br_n} - e^{-br_{n-1}} - e^{-br_{n+1}}) \quad (53)$$

で $e^{-br_n} - 1 = \frac{1}{a} \frac{\partial^2 S_n}{\partial t^2}$ とおき適當な単位を用いると、式(53)は

$$\log(1 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} S_n) = S_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n \quad (54)$$

となる。前と同じように $S_n = S_n^0 + \lambda \psi_n$ とおくと線型化されて

$$\frac{1}{1 + V_n^0(t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_n = \psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n \quad (55)$$

$$V_n^0(t) = \frac{\partial^2 S_n^0}{\partial t^2} \quad (56)$$

となる。 $V_n^0(t)$ がソリトンの連成波を表わす時、

$$V_n^0(t) = \Omega^2 [dn^2(\xi, k) - E/K] \quad (57)$$

$$\xi = \Omega t - pn$$

$$\Omega^2 = \left[\frac{Cn^2(p, k)}{5m^2(p, k)} + \frac{E}{R} \right]^{-1}$$

p は任意常数

E は第2半徑の完全楕円積分

の時、式(56)の解も式(48)と同じ形になる事が示される。

d) 非線型 Schrödinger 方程式

最後に非線型光学や超電導でみられる次の非線型 Schrödinger 方程式¹⁸⁾

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + q|\psi|^2\psi \quad (58)$$

の解も式(40)と同じ形

$$\psi(x, t) = A \frac{H_0(\xi + \beta) H_0(\eta)}{H_0(\xi) H_0(\beta)} e^{-i(\omega t - qx)} \quad (59)$$

となる事も証明できる。この時、面白い事に、図6において上のバンドに対するパラメータ $\beta = i\alpha$ の場合が式(58)で $q > 0$ の時の解になり、下のバンドに対する $\beta = i\alpha + K$ の場合が $q < 0$ の時の解になっている。式(59)は Envelop Soliton¹⁵⁾ の連成波を与えている。

以上、この節では色々な方程式の解の形だけ示したが、解の詳しい性質については、現在検討中である。

References

- 1) J. Rubinstein ; J. of Math. Phys. 11 ('70) 258
- 2) A. C. Scott ; Amer. J. of Phys. 37 ('69) 52
- 3) A. Seeger, H. Donth and A. Kochendörfer ; Zeit. für Phys. 134 ('53) 173
- 4) G. L. Lamb, Jr. ; Physics Letters, 32A ('70) 251
- 5) J. K. Perring and T. H. R. Skyrme ; Nuclear Physic. 31 ('62) 550
- 6) R. M. Miura ; J. of Math. Phys. 9 ('68) 1202
- 7) 戸田盛和. 日本物理学会誌 24巻 ('69) 575
- 8) C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura ; Phys. Rev. Lett. 19 ('67) 1095
- 9) R. Hirota and K. Suzuki ; J. of Phys. Soc. of Japan ; 28 ('70) 1366
- 10) 文献 3) に同じ
- 11) 数理解析石川講究録 83 ('70) 102 戸田良吾, 鈴木公男
- 12) Whittaker and Watson "Modern Analysis" Page 573
- 13) 戸田良吾 ; 物理学会分科会 昭46年4月 講演,
- 14) T. Taniuti & N. Yajima ; J. of Math. Phys. 10 ('69) 1369
- 15) F. D. Tappert & C. M. Varma ; Phys. Rev. Lett. 25 ('70) 1108

- (16) B.D. Josephson; *Advan. Phys.* 14 (65) 419
- (17) L.D. Landau and E.M. Lifshitz; *Quantum Mechanics, non-Relativistic Theory*
- (18) V.E. Zakharov; *Soviet Physics* 26 (68) 994